13/10/16

Ορισμός Ομάδας

Ομάδα $(\emptyset \neq O, \square)$ αποτελεί ομάδα αν:

1) Πράξη καλά ορισμένη
2) Προσεταιριστική
3) $\exists e \in O$, ώστε $a \square e = a = e \square a$ $\forall a \in O$
4) $\forall a \in O$, $\exists a'$ τ.ω. $a \square a' = a' \square a = e$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $a \square b = b \square a$ $\forall a, b \in O$
$(O, \square)$ αβελιανή ομάδα

Βασικές Ιδιότητες

1) e μοναδικό $e' = e'e = e$
2) Ο a' ώστε $a \square a' = e$ είναι μοναδικός και συμβολίζεται $a^{-1} = a'$
3) $(a^{-1})^{-1} = a$
4) $(a \square b)^{-1} = b^{-1} \square a^{-1}$
5) Σε μια ομάδα ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής.

Θεώρημα

Έστω $(O, \square)$ ημιομάδα. Αν υπάρχει $e \in O$ ώστε $a \square e = a$ $\forall a \in O$ και $\forall a \in O$ $\exists b \in O$ ώστε $a \square b = e$, τότε το ζεύγος $(O, \square)$ αποτελεί ομάδα

Το θεώρημα βρίσκει άμεση εφαρμογή στην ύπαρξη αντίστροφου πίνακα.

Άσκηση

Νδο το e είναι μοναδιαίο και αριστερά.

Λύση

Έχουμε $a\square e = a$ και $\exists b: a\square b = e$

$e\square e = e \Rightarrow e\square(a\square b) = a\square b \Rightarrow e\square a\square b = a\square b$

$\Rightarrow e\square a\square \underbrace{b\square \gamma}_{e} = a\square \underbrace{b\square \gamma}_{e} \Rightarrow \exists \gamma$ με $b\square\gamma = e$

$e\square a\square e = a\square e \Rightarrow$

$e\square a = a$

Να δείξουμε ότι έχουμε αντίστροφο αριστερά.

$b\square a = e$?

$\exists \gamma$ με $b\square \gamma = e$

$a\square b = e \Rightarrow a\square b\square \gamma = e\square \gamma \Rightarrow a\square e = \gamma \Rightarrow a$

Ιδιότητες

1) $(G,\square)$ αβελιανή $\Leftrightarrow (a\square b)^{-1} = a^{-1}\square b^{-1}$

γιατί

$(a\square b)^{-1} = b^{-1}\square a^{-1}$, $b^{-1}\square a^{-1}$

$b^{-1}\square a^{-1} = a^{-1}\square b^{-1}$

2) $(G,\square)$ αβελιανή $\Leftrightarrow (a\square b)^2 = a^2\square b^2$

γιατί

$a\square b\square a\square b = a\square a\square b\square b$

$a\square b\square a\square b = a^2\square b^2 \Rightarrow a^{-1}\square a\square b\square a\square$

$a^{-1}\square a^2\square b\square b^{-1} \Rightarrow b\square a = a\square b$

3) Αν $(G,\square)$ ομάδα και $a\in G$, τότε $a\square G = G$

γιατί

$G = \{a_1, \dots, a_k\} \xrightarrow{a} \{a_1\square a, \dots, a_k\square a\}$

$a_i\square a = a_j\square a \Rightarrow a_i = a_j$

4) Έστω $(G,\square)$ ημιομάδα με $|G| = k$ και ισχύει η ιδιότητα

της διαγραφής

$a \square b = \gamma \square b \Rightarrow a = \gamma$

$b \square a = b \square \gamma \Rightarrow a = \gamma$

Τότε

$(O, \square)$ ομάδα

$O = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \xrightarrow{a_1} \{a_1 \square a_1, \dots, a_k \square a_1\}$

Αν

$a_i \square a_j = a_j \square a_i \Rightarrow a_i = a_j \Rightarrow$

$O = O \square a$

Άρα

$a_1 \in O \square a_1 \Rightarrow \exists i_0$ ώστε $a_{i_0} \square a_i = a_j$

Θα δείξω ότι το a_{i_0} είναι το μοναδιαίο

$a_i^? = a_i \square a_{i_0} \square a_i \Rightarrow a_1 = a_1 \square a_{i_0}$

Έστω

$a_i \in O \Rightarrow a_i \square a_{i_0} = a_i \square a_{i_0} \Rightarrow$

$a_i \square \underbrace{a_{i_0} \square a_1}_{a_1} = a_i \square a_{i_0} \square a_1 \Rightarrow$

$a_i \square a_1 = a_i \square a_{i_0} \square a_1 \Rightarrow$

Διαγραφή

$a_i = a_i \square a_{i_0}$ Άρα το a_{i_0} είναι δεξί μοναδιαίο για όλα τα στοιχεία

Με τον ίδιο τρόπο είναι και αντίστροφο

$\forall a_i, \exists a_j$, ώστε $a_i \square a_j = a_{i_0}$

$O = a_i \square O$

$\Downarrow$

$a_{i_0} = a_i \square a_j \Rightarrow a$ έχει αντίστροφο στοιχείο

$S_3 = \{f : \{1,2,3\} \xrightarrow{1-1} \{1,2,3\}\} \Rightarrow |S_3| = 6$

μαζί

1 → τρεις επιλογές

2 → δύο —//—

3 → μία —//—

$3 \cdot 2 \cdot 1$

{S_3 : σύνθεση των απεικονίσεων} είναι καλά ορισμένη

$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$ προσεταιριστική

$\exists$ μοναδιαίο = ταυτοτική

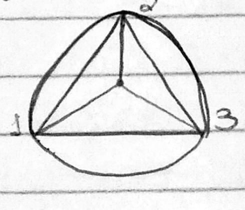
Αν είναι f: "1-1" $\Rightarrow \exists f^{-1}$ "1-1"

Άρα

S_3 : ομάδα

<u>Κανονικά Πολύγωνα</u>

$n=3$



Να ισομετρίες οι οποίες απεικονίζουν το σχήμα στον εαυτό του.

Αυτές είναι συμμετρίες.

Θέλουμε τις —//— στο ισόπλευρο.

$\sigma_{120}^3 = 1$

$\{1, \sigma, \sigma^2, A_1, A_2, A_3\}$

$A_1 \ (1,2,3) \to (1,3,2)$

$A_2 \ (1,2,3) \to (3,2,1)$

$A_3 \ (1,2,3) \to (2,1,3)$

$A_1 \sigma \ (1,2,3) \xrightarrow{\sigma} (2,3,1) \xrightarrow{A_1} (3,2,1) = A_2$

$\underset{\mu_2}{\mu_1 \sigma} \neq \underset{\mu_3}{\sigma \mu_1}$: $(1,2,3) \xrightarrow{\mu_1} (1,3,2) \xrightarrow{\sigma} (2,1,3)$

$\{1, \sigma, \sigma^2, \mu_1\sigma, \mu_1\sigma^2\} \Rightarrow \mu_1\sigma^2 = \sigma\mu_1$

$\mu_1\sigma^2 = \sigma\mu_1 \iff \mu_i \sigma^i \mu_1 = \sigma^{-i}$

$\mu_1^2 = 1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_1^{-1}$

$\{1, \sigma, \sigma^2, \mu_1\sigma, \mu_1\sigma^2\} \cong S_3 = \langle \underset{\sigma}{f}, \underset{\mu_1}{g} \rangle$ και σχέσεις

$f^3 = 1 = g^2$ και $gfg = f^2$

$S_4 = \{ f (1,2,3,4) \xrightarrow{1-1} (1,2,3,4) \}$ $\quad |S_4| = 4! = 24$

$1 \to 4$ επιλογές

$2 \to 3$ —"—

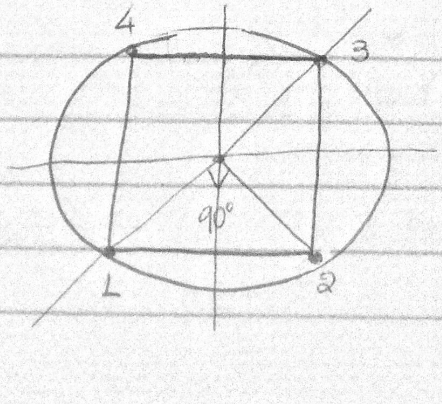
$3 \to 2$ —"—

$4 \to 1$ —"—

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

S_4 με τη σύνθεση είναι ημιομάδα $\Rightarrow S_4$: ομάδα

Κάθε πεπερασμένο σύνολο που είναι ημιομάδα, είναι ομάδα



Συμμετρίες Τετραγώνου

$\sigma_{90} : (1,2,3,4) \to (2,3,4,1)$

$\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4 = 1$

$A(1,3) : (1,2,3,4) \to (1,4,3,2)$

$A(2,4) :$

$A_{xx'} : (1,2,3,4) \to (4,3,2,1)$

$A_{yy'} : (1,2,3,4) \to (2,1,4,3)$

$\{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, A(1,3), A(2,4), A_{xx'}, A_{yy'}\}$

Δεν είναι η S_4 γιατί τότε θα περιείχε

τη $(1,2,3,4) \to (1,3,4,2)$

$D_4 \subsetneq S_4$

δεν είναι όλες γιατί δεν φτιάχνεται κάτι τέτοιο γεωμετρικά ως συμμετρία.

$\sigma A(1,3) : (1,2,3,4) \to (1,4,3,2) \to (2,1,4,3)$

$\quad = A_{yy'}$

$\sigma A(1,1) \quad \sigma : (1,2,3,4) \to (2,3,4,1) \to (4,3,2,1)$

$\quad = A_{xx'}$

Άρα όχι αβελιανή

$\sigma^3 A(1,3) : (1,2,3,4) \to (1,4,3,2) \to (4,3,2,1)$

$\sigma^3 A(1,3) = A(1,3)\sigma$

$f^4 = \underset{\text{ταυτοτική}}{1} = g^2$

$D_4 = \langle \sigma = f, A(1,3) = g \rangle$ Σχέσεις $g f^i g = f^{-}$

Ορισμός

Η ομάδα που δημιουργείται από τις συμμετρίες ενός κανονικού ν-γώνου καλείται διεδρική ομάδα και συμβολίζεται D_ν

Η D_ν έχει τουλάχιστον ν στροφές (μαζί με την ταυτοτική) κατά γωνίες $\frac{2\pi}{\nu}k$

(των ν με άξονες συμμετρίας)

Προσοχή

Είναι διαφορετικές περιπτώσεις $\nu=2k$ ή $\nu=2k+$

Θεώρημα

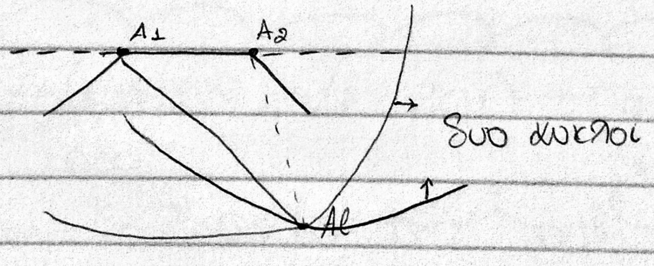
$$|D_\nu| = 2\nu$$

Να το αποδείξω για την άλλη. φορά

Λήμμα

Κάθε σημείο ενός κανονικού πολυγώνου καθο-ρίζεται από τις αποστάσεις του από δύο διαδοχικές κορυφές.

Απόδειξη



Κυκλικές Ομάδες

Ορισμός

Μια ομάδα θα λέγεται κυκλική αν $\forall$ στοιχείο της είναι δύναμη κάποιου συγκεκριμένου.

Γράφουμε $G = \langle a \rangle = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$

1) $|G| = k < +\infty$

2) $|G| = +\infty$

Ορισμός

Τάξη ενός στοιχείου a μιας ομάδας G είναι ο μικρότερος φυσικός n ώστε $a^n = 1$

Αν δεν υπάρχει τέτοιο n η θα έχει άπειρη τάξη

Συμβολίζουμε: $o(a) = n$ ή ∞

Ιδιότητα

$$k = l \bmod n$$

$$a^k = a^l \text{ και } o(a) = n$$

πχ

$\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Άσκηση

Έστω $G : \forall k \in \mathbb{N} \ \exists a_k \in G$ με $o(a_k) = k$?

Ιδιότητες

1) $a^k \cdot a^v = a^{k+v}$

2) $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1} = a^{-k}$

3) $(a^k)^v = a^{kv}$

4) $o(a) = o(a^{-1})$

Απόδειξη

2) $o(a) = k \Rightarrow (a^{-1})^k = (a^k)^{-1} = 1 \Rightarrow l = o(a^{-1}) |$

Αν $l < k \Rightarrow k = \pi \cdot l + \upsilon$

$(a^{-1})^l = 1 \Rightarrow (a^l)^{-1} = 1 \Rightarrow ((a^l)^{-1})^{-1} = 1^{-1} = 1$

$\Rightarrow a^l = 1 \Rightarrow k / l$

- $o(a) = +\infty$

Αν $o(a^{-1}) = k < \infty \Rightarrow$

$(a^{-1})^k = 1 \Rightarrow (a^k)^{-1} = 1 \Rightarrow$

$a^k = 1 \Rightarrow o(a) = k \Rightarrow$

$o(a) < k < +\infty$

5) Αν $o(a) = n$ και $a^m = 1$, τότε n / m

<u>Απόδειξη</u>

Αν $n \nmid m$, $n < m \Rightarrow m = \pi \cdot n + \upsilon$

$0 < \upsilon < n$

$a^m = 1 \Rightarrow (a^n)^\pi \cdot a^\upsilon = 1 \Rightarrow a^\upsilon = 1$

6) Αν $o(a) = n$, τότε $o(a^m) = \dfrac{n}{(n,m)}$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν G αβελιανή $(G,+)$: $a^m = m \cdot a$

<u>Απόδειξη</u>

$o(a^m) = k \Rightarrow (a^m)^k = 1 \Rightarrow a^{mk} = 1 \Rightarrow$

n / mk

$\dfrac{m \cdot k}{(n,m)} = \dfrac{n \cdot a}{(n,m)} \Leftrightarrow \dfrac{n}{(n,m)} \Big| \dfrac{m}{(n,m)} k$

$\left(\dfrac{n}{(n,m)}, \dfrac{m}{(n,m)} \right) = 1$

$\dfrac{n}{(n,\ldots}$

$$(a^m)^{n/(n,m)} = (a^n)^{m/(n,m)} = 1 \Rightarrow$$

$$k \,/\, \frac{n}{(n,m)} \quad (2) \xRightarrow[(2)]{(1)} k = \frac{n}{(n,m)}$$

<u>Ασκήσεις πάνω στις Υποομάδες</u>

1, 2, 3, 4, 8